Résoudre quatre équations

CORRIGÉ DÉTAILLÉ | Exercice 1 : 6 points | 1,5 point par équation

a. Deux racines distinctes

Pour $3x^2 - 5x - 2 = 0$, les coefficients sont $a = 3$, $b = -5$ et $c = -2$.

$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 25 + 24 = 49$.

Les deux racines sont $(5 - 7) / 6 = -1/3$ et $(5 + 7) / 6 = 2$. Ainsi, **$S = \{-1/3 ; 2\}$**.

On peut vérifier avec la factorisation $(3x + 1)(x - 2) = 3x^2 - 5x - 2$.

b. Une racine double

On reconnaît une identité remarquable : $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$.

L'équation équivaut à $2x - 1 = 0$, donc **$S = \{1/2\}$**. Le discriminant donne le même résultat : $\Delta = 16 - 16 = 0$ et $x_0 = 4 / 8 = 1/2$.

c. Aucune racine réelle

Pour $x^2 + 4x + 7 = 0$, $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 7 = 16 - 28 = -12$.

Comme $\Delta < 0$, l'équation ne possède aucune solution réelle : **$S = \varnothing$**. On peut également écrire $x^2 + 4x + 7 = (x + 2)^2 + 3$: l'expression est toujours strictement positive.

d. Deux solutions avec une racine carrée

Pour $x^2 - 6x + 6 = 0$, $\Delta = 36 - 24 = 12$ et $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Les solutions sont $(6 - 2\sqrt{3}) / 2 = 3 - \sqrt{3}$ et $(6 + 2\sqrt{3}) / 2 = 3 + \sqrt{3}$. Donc **$S = \{3 - \sqrt{3} ; 3 + \sqrt{3}\}$**.

Une autre méthode consiste à écrire $(x - 3)^2 - 3 = 0$, puis $(x - 3)^2 = 3$.

Barème proposé : pour chaque équation, 0,5 point pour la méthode justifiée, 0,5 point pour les calculs corrects et 0,5 point pour la conclusion avec l'ensemble solution. Total : 6 points.

Point à surveiller : un discriminant négatif signifie « aucune solution dans $\mathbb{R}$ ». Il ne signifie pas que les solutions sont des nombres réels négatifs.

Étude d’un trinôme

CORRIGÉ DÉTAILLÉ | Exercice 2 : 5 points | 1 point par question

1. Forme canonique

On met -2 en facteur dans les termes contenant x :

$f(x) = -2(x^2 - 4x) + 10 = -2[(x - 2)^2 - 4] + 10$.

Ainsi, **$f(x) = -2(x - 2)^2 + 18$**.

2. Sommet, maximum et variations

Le sommet est **S(2 ; 18)**. Comme $-2(x - 2)^2 \leq 0$, on a $f(x) \leq 18$, avec égalité pour $x = 2$. Le maximum est donc **18, atteint pour x = 2**.

Le coefficient de x^2 est négatif : la fonction est croissante sur $]-\infty ; 2]$, puis décroissante sur $[2 ; +\infty[$.

3. Racines

Avec $a = -2$, $b = 8$ et $c = 10$, $\Delta = 64 - 4 \times (-2) \times 10 = 144$.

Les formules donnent $(-8 - 12) / (-4) = 5$ et $(-8 + 12) / (-4) = -1$. On les classe dans l’ordre croissant : **−1 et 5**. L’ensemble solution est $\{-1 ; 5\}$.

On pouvait également partir de la forme canonique : $-2(x - 2)^2 + 18 = 0$ équivaut à $(x - 2)^2 = 9$, donc $x - 2 = -3$ ou $x - 2 = 3$.

4. Tableau de signes

On a $f(x) = -2(x + 1)(x - 5)$. Puisque le coefficient dominant est négatif, le trinôme est négatif à l’extérieur de ses racines et positif entre elles.

x	$]-\infty ; -1[$	-1	$]-1 ; 5[$	5	$]5 ; +\infty[$
Signe de $f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

5. Résoudre f(x) ≥ 10

$f(x) \geq 10$ équivaut à $-2x^2 + 8x \geq 0$, soit $-2x(x - 4) \geq 0$.

Ce nouveau trinôme a pour racines 0 et 4 et son coefficient dominant est négatif. Il est donc positif ou nul entre ses racines : **$x \in [0 ; 4]$**.

Point à surveiller : les racines -1 et 5 répondent à $f(x) = 0$. Pour comparer $f(x)$ à 10, on étudie le signe de $f(x) - 10$; les frontières changent.

Barème proposé : question 1, 1 point pour la transformation détaillée ; question 2, 0,5 point pour le sommet et le maximum, puis 0,5 point pour les variations ; question 3, 0,5 point pour la méthode et 0,5 point pour les racines ; question 4, 0,5 point pour les racines et leurs zéros dans le tableau, puis 0,5 point pour les signes ; question 5, 0,5 point pour l’expression à étudier et 0,5 point pour l’intervalle. Total : 5 points.

Positions relatives de deux courbes

CORRIGÉ DÉTAILLÉ | Exercice 3 : 4 points | 1 + 1 + 2 points

1. Étudier une différence

$p(x) - d(x) = x^2 + 2x - 3 - (3x + 3) = x^2 - x - 6$.

On obtient **$p(x) - d(x) = (x + 2)(x - 3)$**. Le développement du produit permet de vérifier cette factorisation.

2. Points d'intersection

Les courbes se rencontrent lorsque $p(x) = d(x)$, c'est-à-dire lorsque leur différence est nulle. Les abscisses d'intersection sont donc -2 et 3.

Pour obtenir les ordonnées, on remplace ces valeurs dans d, dont l'expression est plus courte : $d(-2) = -6 + 3 = -3$ et $d(3) = 9 + 3 = 12$.

Les points d'intersection sont **$(-2 ; -3)$ et $(3 ; 12)$**. Donner seulement -2 et 3 ne suffit pas lorsque les coordonnées des points sont demandées.

3. Courbe au-dessus ou au-dessous

Le coefficient dominant de $x^2 - x - 6$ est positif. La différence est négative entre les racines, positive à l'extérieur et nulle aux racines.

- Pour $x \in \mathbf{]-2 ; 3[}$, $p(x) < d(x)$: la parabole est strictement au-dessous de la droite.
- Pour $x \in \mathbf{]-\infty ; -2[\cup]3 ; +\infty[}$, $p(x) > d(x)$: la parabole est strictement au-dessus de la droite.
- Pour $x = -2$ ou $x = 3$, les deux courbes se rencontrent.

Barème proposé : question 1, 0,5 point pour la différence et 0,5 point pour sa factorisation ; question 2, 0,5 point par point d'intersection complet ; question 3, 0,5 point pour le signe de la différence, 0,5 point pour chaque région strictement au-dessous et au-dessus, puis 0,5 point pour les cas d'égalité. Total : 4 points.

Point à surveiller : le signe de $p(x)$ seul compare la parabole à l'axe des abscisses. Pour la comparer à une autre courbe, il faut étudier $p(x) - d(x)$.

Un problème d’optimisation

CORRIGÉ DÉTAILLÉ | Exercice 4 : 5 points | 1 + 1 + 1 + 2 points

1. Traduire la longueur de clôture

Seuls trois côtés sont clôturés : $x + x + y = 20$. Ainsi, **$y = 20 - 2x$**.

Les dimensions sont strictement positives : $x > 0$ et $20 - 2x > 0$. Le domaine est donc **$x \in]0 ; 10[$**. Les bornes 0 et 10 donneraient une dimension nulle.

2. Exprimer l’aire et sa forme canonique

$A(x) = xy = x(20 - 2x) = -2x^2 + 20x$.

En complétant le carré, $A(x) = -2(x^2 - 10x) = -2[(x - 5)^2 - 25]$. Donc **$A(x) = -2(x - 5)^2 + 50$**, avec une aire exprimée en mètres carrés.

3. Aire maximale

Comme $-2(x - 5)^2 \leq 0$, on a $A(x) \leq 50$. L’égalité est atteinte en $x = 5$, qui appartient bien au domaine $]0 ; 10[$.

L’aire maximale est **50 m²**. Les dimensions de l’enclos sont **5 m et 10 m**, puisque $y = 20 - 2 \times 5 = 10$.

Vérification : la clôture mesure $5 + 5 + 10 = 20$ m et l’aire vaut $5 \times 10 = 50$ m².

4. Obtenir au moins 42 m²

$A(x) \geq 42$ équivaut à $-2x^2 + 20x - 42 \geq 0$, soit **$-2(x - 3)(x - 7) \geq 0$**.

Les racines sont 3 et 7. Le coefficient dominant est négatif : le trinôme est positif ou nul entre les racines. On obtient $x \in [3 ; 7]$.

Cet intervalle est inclus dans $]0 ; 10[$. La réponse est donc **$3 \leq x \leq 7$, avec x exprimé en mètres**. Les bornes sont incluses car elles donnent exactement 42 m².

Barème proposé : question 1, 0,5 point pour y et 0,5 point pour le domaine ; question 2, 0,5 point pour l’aire et 0,5 point pour la forme canonique ; question 3, 0,5 point pour le maximum justifié et 0,5 point pour les deux dimensions ; question 4, 0,5 point pour l’inéquation ramenée à zéro, 0,5 point pour les racines ou la factorisation, 0,5 point pour le signe et l’intervalle, puis 0,5 point pour la conclusion tenant compte du domaine et de l’unité. Total : 5 points.

Point à surveiller : la clôture ne correspond pas au périmètre complet du rectangle. Le mur remplace un côté : écrire $2x + 2y = 20$ modéliserait un autre problème.

Total du contrôle : 6 + 5 + 4 + 5 = 20 points.