Distinguer produit, norme et carré

EXERCICE 9 | Repère orthonormé et vecteurs en gras

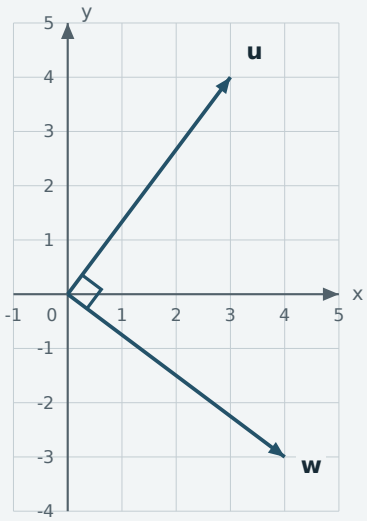
Exercice 9 - Produit scalaire et norme d'une somme

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3 \times 2 + 4 \times (-1) = \mathbf{2}$. Ces deux vecteurs ne sont pas orthogonaux. En revanche, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 3 \times 4 + 4 \times (-3) = \mathbf{0}$: **u** et **w** sont orthogonaux.

2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (5 ; 3)$, donc $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = 5^2 + 3^2 = \mathbf{34}$.

3. $\|\mathbf{u}\|^2 = 25$ et $\|\mathbf{v}\|^2 = 5$. L'identité donne $25 + 2 \times 2 + 5 = \mathbf{34}$. La norme elle-même vaut $\sqrt{34}$.

Les vecteurs u et w sont orthogonaux



u = (3 ; 4)

w = (4 ; −3)

u · **w** = 0

Avec **v** = (2 ; −1) :
u · **v** = 2 ≠ 0.
Ces deux vecteurs ne sont pas orthogonaux.

Bien distinguer les résultats

Le produit scalaire **u** · **v** est le nombre 2. La somme **u** + **v** est le vecteur (5 ; 3). Le carré de sa norme vaut 34, et sa norme vaut $\sqrt{34}$.

Le résultat à donner selon la question posée

Choisir le bon rôle du vecteur

EXERCICE 10 | Équation d'une perpendiculaire

Exercice 10 - Construire une droite perpendiculaire

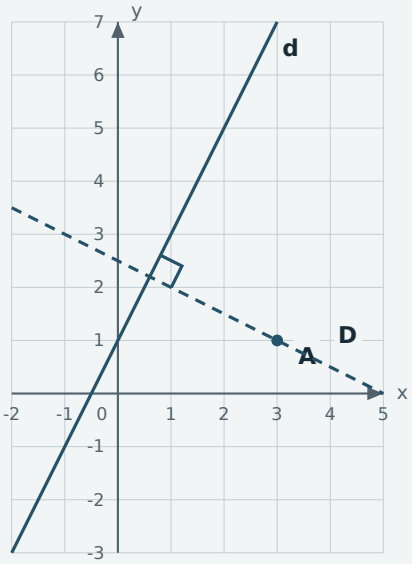
1. Le vecteur **u** = (1 ; 2) dirige d. Comme D est perpendiculaire à d, ce même vecteur est **normal à D**.

2. Avec le point A et ce vecteur normal : (x − 3) + 2(y − 1) = 0. On obtient **x + 2y − 5 = 0**, soit y = −x/2 + 5/2.

3. Pour A(3 ; 1), on a 3 + 2 × 1 − 5 = 0. D passe donc par A. Un vecteur directeur de D est **v** = (2 ; −1), et **u** · **v** = 1 × 2 + 2 × (−1) = 0 : les droites sont bien perpendiculaires.

Piège : l'équation 2x − y − 5 = 0 donnerait y = 2x − 5, de même coefficient directeur que d. Elle définirait une parallèle et ne répondrait pas à l'énoncé.

Deux droites perpendiculaires



d : y = 2x + 1

A(3 ; 1)

D : x + 2y − 5 = 0

soit y = −x/2 + 5/2.

u = (1 ; 2) est normal à D.

v = (2 ; −1) dirige D.

u · **v** = 0.

Pourquoi le vecteur directeur de d est normal à D

Garder la valeur exacte jusqu’à la fin

EXERCICE 11 | Produit scalaire et angle d’un triangle

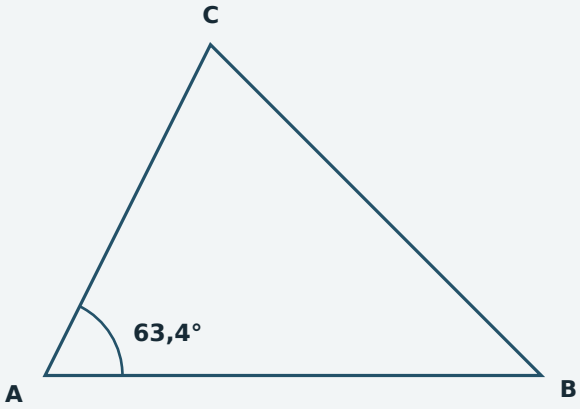
Exercice 11 - Calculer l’angle d’un triangle

1. **AB** = (6 ; 0) et **AC** = (2 ; 4). Le produit scalaire vaut 6 × 2 + 0 × 4 = **12**. Les longueurs sont AB = **6** et AC = **√20 = 2√5**.

2. Les deux vecteurs sont non nuls. Donc cos(Â) = 12/(6 × 2√5) = **1/√5**.

3. En mode degrés, Â = arccos(1/√5) ≈ **63,4°**. Garde la valeur exacte jusqu’à la dernière étape pour limiter l’erreur d’arrondi.

Triangle ABC : l’angle au sommet A



A(0 ; 0)
B(6 ; 0)
C(2 ; 4)

AB = 6
AC = 2√5
cos(Â) = 1/√5
Â ≈ 63,4°

Contrôler la cohérence

Le cosinus 1/√5 est positif : l’angle en A est donc aigu. L’arrondi 63,4° est cohérent. La calculatrice doit être réglée en degrés pour obtenir la valeur demandée.

Valeur exacte, réglage de la calculatrice et arrondi

Vérifier les deux conditions du projeté

EXERCICE 12 | Appartenance à la droite et perpendicularité

Exercice 12 - Trouver un projeté orthogonal

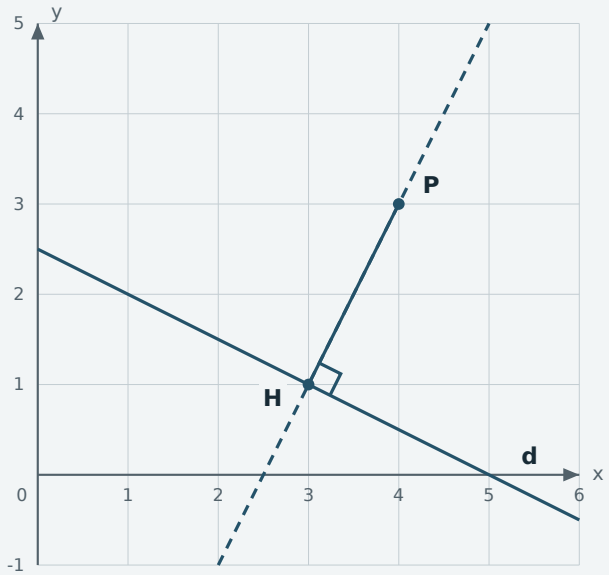
1. Un vecteur normal à d est **n** = **(1 ; 2)**.

2. Ce vecteur dirige la perpendiculaire cherchée. Sa pente est 2 ; son équation s'écrit y = 2x + p. Comme elle passe par P(4 ; 3), 3 = 8 + p, donc p = −5. Son équation est **y = 2x − 5**.

3. On résout le système x + 2y − 5 = 0 et y = 2x − 5. En remplaçant y : x + 2(2x − 5) − 5 = 0, soit 5x − 15 = 0. Donc x = 3 et y = 1 : **H(3 ; 1)**.

On vérifie que 3 + 2 × 1 − 5 = 0, donc H appartient à d. De plus, **PH** = (−1 ; −2) est colinéaire à **n** : (PH) est bien perpendiculaire à d. Enfin, PH = √((−1)² + (−2)²) = **√5**.

H est le pied de la perpendiculaire



d : x + 2y − 5 = 0

P(4 ; 3)

Perpendiculaire :

y = 2x − 5

H(3 ; 1)

PH = √5

H appartient à d.

(PH) est perpendiculaire à d.

Les deux vérifications qui caractérisent H