Nombres et intervalles

EXERCICES 1 ET 2 | Compare les démarches avant les résultats

Exercice 1 - Fractions, puissances, racines et arithmétique

1. La multiplication est prioritaire : (2/3) × (3/4) = 6/12 = 1/2. Donc A = 5/6 − 3/6 = **1/3**.

2. On multiplie les coefficients et on additionne les exposants : B = $6 \times 10^{4-6}$ = **6×10^{-2} = 0,06**. Le coefficient 6 est bien compris entre 1 inclus et 10 exclu.

3. Comme 72 = 36 × 2, √72 = √36 × √2 = **6√2**.

4. 84 = 2 × 42 = 2 × 2 × 21 = **$2^2 \times 3 \times 7$**. Les facteurs 2, 3 et 7 sont premiers.

Attention : la racine d'une somme n'est pas la somme des racines. La simplification précédente utilise un produit de nombres positifs.

Exercice 2 - Intervalles et distance

1. x appartient à I lorsque **$-3 < x \leq 4$**. Le nombre −3 est exclu et 4 est inclus.

2. L'intersection contient les nombres appartenant aux deux intervalles : **I ∩ J = [1 ; 4]**. L'union contient les nombres appartenant à au moins l'un des deux : **I ∪ J =]−3 ; 6[**. Les intervalles se recouvrent, donc il n'y a pas de coupure dans cette union.

3. |x − 2| est la distance entre x et 2. Elle doit être au plus égale à 3 : 2 − 3 ≤ x ≤ 2 + 3. Ainsi, **S = [−1 ; 5]**.

Une erreur à comprendre et la règle à retenir

Calcul, équations et signes

EXERCICES 3 À 5 | Développement, factorisation et intervalles

Exercice 3 - Développer, factoriser et résoudre

1. $(2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$ et $(2x - 3)(x + 1) = 2x^2 - x - 3$. En soustrayant toute la seconde expression, on obtient **$A(x) = 2x^2 - 11x + 12$**.

2. Le facteur commun est $2x - 3$. Donc $A(x) = (2x - 3)[(2x - 3) - (x + 1)] =$ **$(2x - 3)(x - 4)$**.

3. $A(-1) = (-5) \times (-5) =$ **25**.

4. Un produit est nul si et seulement si au moins un facteur est nul. Ainsi, $2x - 3 = 0$ ou $x - 4 = 0$, donc **$S = \{3/2 ; 4\}$**.

À vérifier : le signe « − » devant une parenthèse change le signe de chacun de ses termes.

Exercice 4 - Équation et inéquation du premier degré

1. $6x - 7 = 2x + 5$, puis $4x = 12$, donc **$x = 3$**. Vérification : les deux membres de l'équation initiale valent 11.

2. $-3x > -6$. On divise par -3, un nombre négatif : **le sens de l'inégalité s'inverse**. On obtient $x < 2$, soit **$S =]-\infty ; 2[$**. La borne 2 est exclue car l'inégalité est stricte.

Exercice 5 - Signes d'un produit et d'un quotient

Les changements de signe se produisent en -1 et en 2.

Expression	$x < -1$	$-1 < x < 2$	$x > 2$
$x - 2$	−	−	+
$x + 1$	−	+	+
Produit	+	−	+
Quotient	+	−	+

1. Le produit est négatif entre -1 et 2 ; il est nul aux deux bornes. Comme on cherche les valeurs négatives ou nulles, **$S = [-1 ; 2]$**.

2. Le dénominateur s'annule pour $x = -1$: cette valeur est interdite. Le quotient est strictement positif à l'extérieur des deux bornes. Il est nul en 2, qui ne convient donc pas. Ainsi, **$S =]-\infty ; -1[\cup]2 ; +\infty[$**.

Les signes sur les intervalles sont identiques, mais le statut des bornes diffère entre le produit et le quotient.

Images, solutions et variations

EXERCICES 6 À 8 | Domaine de définition et sens de variation

Exercice 6 - Étudier une fonction affine

1. $f(-1) = 2 + 5 = \mathbf{7}$ et $f(3) = -6 + 5 = \mathbf{-1}$.

2. On résout $-2x + 5 = -3$: $-2x = -8$, donc $\mathbf{x = 4}$.

3. Le coefficient directeur -2 est négatif : f est **strictement décroissante sur** $\mathbb{R}$. Lorsque x augmente de 1, f(x) diminue de 2.

4. $-2x + 5 \geq 0$ équivaut à $-2x \geq -5$, puis $x \leq 5/2$. Ainsi, $\mathbf{S =]-\infty\ ;\ 5/2]}$.

Exercice 7 - Utiliser les fonctions de référence

1. Les nombres 5 et -5 ont pour carré 25 : $\mathbf{S = \{-5\ ;\ 5\}}$.

2. Un carré est au plus égal à 9 lorsque $-3 \leq x \leq 3$: $\mathbf{S = [-3\ ;\ 3]}$.

3. L'expression est définie pour $x \geq 0$. En élevant l'égalité au carré, $x = 16$; cette valeur vérifie bien $\sqrt{16} = 4$. Donc $\mathbf{S = \{16\}}$.

4. $(-2)^3 = -8$. La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc l'unique solution est $\mathbf{x = -2}$.

5. La valeur 0 est interdite. Si $x < 0$, alors $1/x < 0 < 1/2$: toutes ces valeurs conviennent. Si $x > 0$, on peut multiplier par $2x$, positif : $2 \leq x$. Ainsi, $\mathbf{S =]-\infty\ ;\ 0[\cup [2\ ;\ +\infty[}$.

Piège : on ne multiplie pas une inégalité par x sans connaître son signe.

Exercice 8 - Exploiter des variations

1. Sur le premier intervalle, les valeurs vont de -1 à 4 ; sur le second, elles vont de 4 à 0. Le **maximum est 4, atteint pour $x = 1$**, et le **minimum est -1, atteint pour $x = -2$**.

2. Les nombres 2 et 4 appartiennent à l'intervalle où g est strictement décroissante. Comme $2 < 4$, $\mathbf{g(2) > g(4)}$.

3. Non. Les nombres 0 et 3 se trouvent dans deux intervalles de variation différents. On sait seulement que $-1 < g(0) < 4$ et $0 < g(3) < 4$. Ces informations permettent plusieurs ordres possibles.

Un tableau de quelques valeurs isolées ne suffirait pas à prouver ces variations : ici, elles sont explicitement données dans l'énoncé.

Vecteurs et équations de droites

EXERCICES 9 ET 10 | Coordonnées exactes et justifications

Exercice 9 - Vecteurs, alignement, milieu et distance

1. On soustrait les coordonnées de l'origine à celles de l'extrémité. Le vecteur AB a pour coordonnées $(3 - (-1) ; 4 - 2) =$ **(4 ; 2)**. Le vecteur AC a pour coordonnées **(6 ; 3)**.

2. $(6 ; 3) = 1{,}5 \times (4 ; 2)$: les vecteurs sont colinéaires. Comme ils ont la même origine A, **A, B et C sont alignés**. On peut aussi vérifier que leur déterminant vaut $4 \times 3 - 2 \times 6 = 0$.

3. $x_M = (-1 + 3)/2 = 1$ et $y_M = (2 + 4)/2 = 3$. Donc **M(1 ; 3)**.

4. Le repère est orthonormé, donc $AB = \sqrt{[(3 - (-1))^2 + (4 - 2)^2]} = \sqrt{20} =$ **$2\sqrt{5}$**.

Piège : une distance est un nombre positif ou nul ; un vecteur non nul possède une direction, un sens et une norme, et ses coordonnées peuvent être négatives.

Exercice 10 - Droites parallèles et point d'intersection

1. La pente vaut $(7 - 3)/(3 - 1) = 2$. On cherche b tel que $y = 2x + b$. Comme P appartient à d, $3 = 2 \times 1 + b$, donc $b = 1$. Ainsi, **d : y = 2x + 1**, soit **2x − y + 1 = 0**.

2. Les deux droites ont la même pente 2 et des ordonnées à l'origine différentes, 1 et −5. Elles sont donc **parallèles et distinctes**.

3. À l'intersection, $2x + 1 = -x + 7$, soit $3x = 6$, donc $x = 2$. Puis $y = 2 \times 2 + 1 = 5$. Le point cherché est **(2 ; 5)**. Il vérifie aussi $y = -2 + 7$.

4. Tous les points de cette droite ont la même abscisse que P : **x = 1**. Une droite verticale ne possède pas d'équation réduite de la forme $y = ax + b$.

La méthode à reprendre

Pourcentages et statistiques

EXERCICES 11 À 13 | Évolutions, dispersion et fréquences

Exercice 11 - Évolutions successives et réciproques

1. Une hausse de 25 % correspond au coefficient 1,25. Le nouveau prix vaut 80 × 1,25 = **100 €**.

2. Une baisse de 10 % correspond au coefficient 0,90. Le prix final vaut 100 × 0,90 = **90 €**.

3. Le coefficient global est 1,25 × 0,90 = 1,125. Le taux global vaut donc 1,125 − 1 = 0,125, soit une **hausse de 12,5 %**. On retrouve ce résultat par (90 − 80)/80.

4. Pour passer de 100 € à 80 €, le coefficient nécessaire est 80/100 = 0,80 : il faut une **baisse de 20 %**. Le coefficient réciproque de 1,25 est bien 1/1,25 = 0,80.

On ne soustrait pas directement les deux taux : ils s'appliquent à des prix différents.

Exercice 12 - Moyenne, médiane, quartiles et écart type

1. N = 1 + 2 + 3 + 2 + 1 + 1 = **10**. La somme pondérée des notes vaut 6 + 2 × 8 + 3 × 10 + 2 × 12 + 14 + 16 = 106. La moyenne est donc **106/10 = 10,6**.

2. La série ordonnée est : 6 ; 8 ; 8 ; 10 ; 10 ; 10 ; 12 ; 12 ; 14 ; 16. Avec dix valeurs, on prend la moyenne des 5e et 6e : **la médiane est 10**.

3. N/4 = 2,5 conduit au rang 3, donc $\mathbf{Q_1 = 8}$. Le rang de Q_3 est l'entier supérieur à 7,5, soit 8 : $\mathbf{Q_3 = 12}$. L'écart interquartile est **12 − 8 = 4**.

4. La somme des carrés des écarts à la moyenne, en tenant compte des effectifs, vaut 80,4. Ainsi, σ = √(80,4/10) = √8,04 ≈ **2,84**. Cet indicateur mesure la dispersion des notes autour de la moyenne ; il est exprimé dans la même unité que les notes.

5. Chaque note gagne 2 points, donc la moyenne gagne aussi 2 points : **12,6**. Les écarts à la nouvelle moyenne restent inchangés, tout comme l'écart type.

Exercice 13 - Tableau croisé et fréquences conditionnelles

1. Les totaux des lignes sont **24 au théâtre** et **36 sans théâtre**. Les totaux des colonnes sont **20 en musique** et **40 sans musique**. Les deux façons d'additionner donnent bien 60.

2. Le groupe de référence comprend les 60 élèves : 24/60 = 0,40, soit **40 %**. C'est la fréquence marginale du théâtre.

3. Le mot « parmi » restreint le groupe aux 24 élèves du théâtre. Douze font aussi de la musique : 12/24 = **50 %**.

4. Cette fois, le groupe de référence comprend les 20 élèves de musique. Douze font aussi du théâtre : 12/20 = **60 %**.

Les deux dernières fréquences sont conditionnelles. Le numérateur est identique, mais le dénominateur change : inverser les conditions ne conserve pas nécessairement la fréquence.

Événements et tirages successifs

EXERCICES 14 ET 15 | Compter les issues et suivre les chemins

Exercice 14 - Intersection, union et événement contraire

1. Il y a quatre boules rouges et cinq numéros pairs : **P(R) = 4/10 = 2/5** et **P(E) = 5/10 = 1/2**.

2. R ∩ E signifie « rouge et paire ». Les numéros possibles sont 2 et 4, donc **P(R ∩ E) = 2/10 = 1/5**.

3. R ∪ E signifie « rouge ou paire, éventuellement les deux ». On additionne les probabilités, puis on retire l'intersection comptée deux fois : P(R ∪ E) = 4/10 + 5/10 − 2/10 = **7/10**. Les numéros correspondants sont 1, 2, 3, 4, 6, 8 et 10.

4. L'événement contraire est « obtenir une boule bleue ». Sa probabilité vaut 1 − 4/10 = **6/10 = 3/5**.

Exercice 15 - Probabilités conditionnelles sans remise

1. Au départ, il y a cinq boules : **$P(R_1) = 3/5$** et **$P(B_1) = 2/5$**.

2. Il ne reste que quatre boules au second tirage. Leur répartition dépend de la première couleur :

Première boule	Composition restante	Rouge au second	Bleue au second
Rouge	2 rouges, 2 bleues	2/4 = 1/2	2/4 = 1/2
Bleue	3 rouges, 1 bleue	3/4	1/4

Ces quatre valeurs correspondent aux pondérations des branches du second niveau d'un arbre. Dans chaque ligne, leur somme vaut 1.

3. On multiplie les probabilités le long du chemin « rouge puis rouge » : $P(R_1 \cap R_2) = (3/5) \times (2/4) =$ **3/10**.

4. Pour « bleue puis rouge », $P(B_1 \cap R_2) = (2/5) \times (3/4) =$ **3/10**.

Piège : garder un dénominateur égal à 5 au second tirage reviendrait à ignorer l'absence de remise.

Comprendre le programme

EXERCICE 16 | Calcul d’un coût et recherche d’un maximum

Exercice 16 - Fonction de coût et recherche d’un maximum

1. Comme $3 \leq 5$, `cout(3)` renvoie $4 \times 3 =$ **12**. Pour huit séances, le coût vaut $20 + 3 \times (8 - 5) =$ **29**.

2. Les cinq premières séances coûtent $5 \times 4 =$ **20 €**. Pour $n > 5$, il reste **n − 5 séances** facturées 3 € chacune.

3. La boucle ajoute une séance tant que la suivante reste dans le budget. Pour $n = 10$, le coût vaut $20 + 3 \times 5 = 35$ €. Pour onze séances, il vaut 38 €. Le programme affiche donc **10**, le nombre maximal de séances accessibles avec 35 €.

4. Il faut remplacer 35 par `50` dans la condition. Quinze séances coûtent $20 + 3 \times 10 = 50$ €, alors que seize coûtent 53 €. Le programme affiche **15**.

Le test porte sur `n + 1` afin de vérifier le coût de la prochaine séance avant de l’ajouter. Le coût augmente à chaque séance : la boucle finit donc par s’arrêter.

Refais la trace à la main, puis exécute les deux blocs de code du sujet pour vérifier. Dans la boucle, observe le coût de la prochaine séance avant d’augmenter n.

Ma trace du programme et les points à retravailler