Interpréter le nombre dérivé

EXERCICES 1 ET 2 | Définition et équation de tangente

Exercice 1 - Calculer un nombre dérivé par la définition

$f(2) = 2$ et $f(2 + h) = (2 + h)^2 - (2 + h) = 2 + 3h + h^2$.

Le taux vaut donc $(3h + h^2) / h = 3 + h$. Quand h tend vers 0, il tend vers 3 : **$f'(2) = 3$**.

Le calcul direct $f'(x) = 2x - 1$ confirme la valeur, mais il ne remplace pas la méthode demandée dans cet exercice.

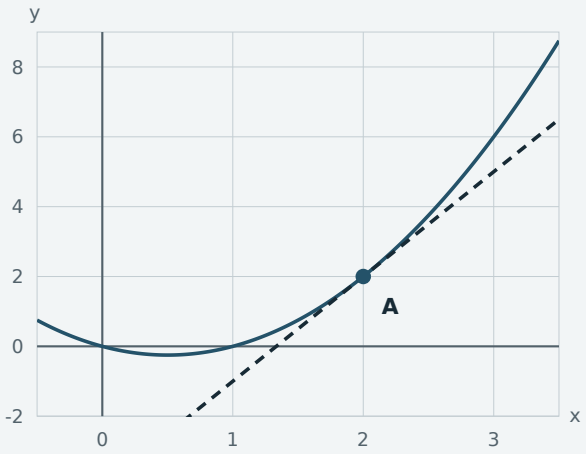
Exercice 2 - Retrouver une pente de tangente

A appartient à la courbe, donc **$f(1) = 3$**. A et B appartiennent à la tangente : sa pente vaut $(-1 - 3) / (3 - 1) = -4 / 2 = -2$.

Ainsi, **$f'(1) = -2$** et $y = -2(x - 1) + 3$, soit **$y = -2x + 5$**.

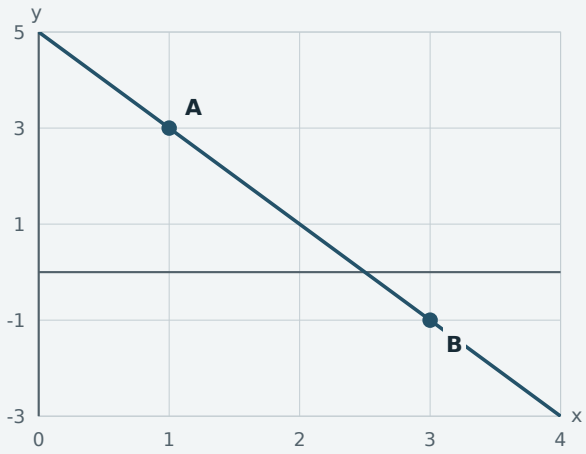
On ne peut pas en déduire $f(3) = -1$: l'énoncé place B sur la tangente, sans affirmer qu'il appartient à la courbe.

Ex. 1 : nombre dérivé et tangente



Trait plein : f ; pointillés : tangente en 2.

Ex. 2 : la tangente donnée



La courbe de f n'est pas déterminée.

Ce que l'on peut déduire du point A et du point B

Appliquer les formules avec leur domaine

EXERCICES 3 À 5 | Somme, produit, quotient et tangente

Exercice 3 - Dériver des expressions usuelles

1. Sur $\mathbb{R}$, $\mathbf{f'(x) = 20x^4 - 6x}$. Le terme constant 7 a pour dérivée 0.

2. g est définie et dérivable sur]0 ; +∞[: la racine impose $x \geq 0$ et le quotient exclut 0. Donc $\mathbf{g'(x) = 1 / \sqrt{x} - 3 / x^2}$.

3. Pour $x \neq 0$, $\mathbf{p'(x) = -3x^{-4} = -3 / x^4}$. On diminue l'exposant de 1 : $-3 - 1 = -4$.

Exercice 4 - Dériver un produit de deux façons

Avec $u(x) = x - 1$ et $v(x) = x^2 + 2$, on a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2x$.

$f'(x) = (x^2 + 2) + (x - 1) \times 2x = \mathbf{3x^2 - 2x + 2}$.

En développant, $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 2$. La dérivation terme à terme donne bien le même résultat.

Exercice 5 - Quotient et tangente

Le domaine est $\mathbb{R}$ privé de -1. La fonction y est dérivable et :

$f'(x) = [2x(x + 1) - (x^2 + 2)] / (x + 1)^2 = \mathbf{(x^2 + 2x - 2) / (x + 1)^2}$.

$f(0) = 2$ et $f'(0) = -2$. La tangente a donc pour équation $\mathbf{y = -2x + 2}$.

Le signe « moins » devant $(x^2 + 2)$ change le signe des deux termes au numérateur.

Le domaine et les signes à vérifier

Vérifier les bornes et les points critiques

EXERCICES 6 ET 7 | Dérivabilité et extrema sur un segment

Exercice 6 - Racine carrée : définition et dérivabilité

f est définie sur **[0 ; +∞[** et dérivable sur **]0 ; +∞[**, avec f′(x) = 1 / (2√x).

Donc **f′(4) = 1 / 4**. En 0, le dénominateur de cette formule s'annule. Le taux à droite est [√h − 0] / h = 1 / √h pour h > 0, et il tend vers +∞.

Il n'existe donc pas de nombre dérivé réel fini en 0, même si f(0) existe. On ne peut pas utiliser en ce point la formule de tangente avec une pente finie.

Exercice 7 - Variations, extrema locaux et extrema globaux

f est un polynôme, donc elle est continue et dérivable sur ℝ.

f′(x) = 6x^2 − 18x + 12 = 6(x − 1)(x − 2). Sur l'intervalle étudié, le signe est positif avant 1, négatif entre 1 et 2, puis positif après 2. La dérivée est nulle en 1 et 2.

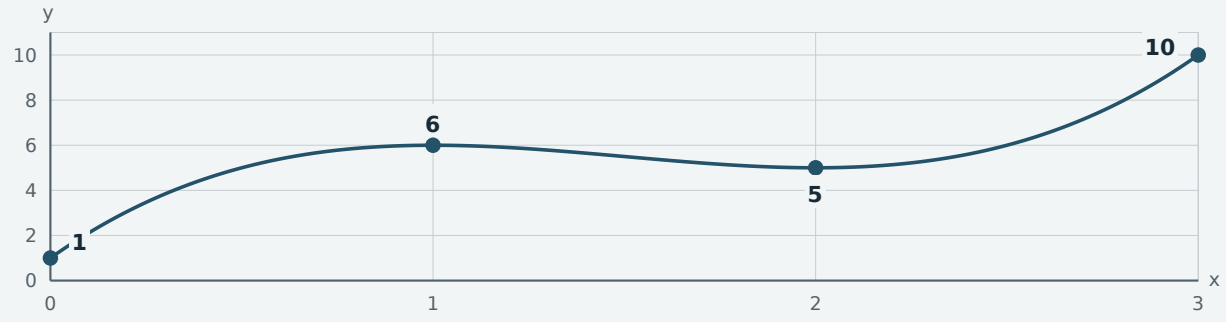
On calcule f(0) = 1, f(1) = 6, f(2) = 5 et f(3) = 10.

Intervalle	Signe de f′ à l'intérieur	Variations de f
[0 ; 1]	+	1 ↗ 6
[1 ; 2]	−	6 ↘ 5
[2 ; 3]	+	5 ↗ 10

À l'intérieur du segment, f admet un **maximum local de 6 en x = 1** et un **minimum local de 5 en x = 2**.

Sur tout [0 ; 3], le **minimum global est 1, atteint en x = 0**, et le **maximum global est 10, atteint en x = 3**. Le maximum local n'est donc pas forcément la plus grande valeur sur l'intervalle entier.

Ex. 7 : extrema locaux et globaux sur [0 ; 3]



Optimiser et utiliser une tangente

EXERCICES 8 ET 9 | Aire maximale et approximation affine

Exercice 8 - Optimiser l'aire d'un enclos

Les trois côtés clôturés vérifient 2x + L = 40, donc **L = 40 − 2x**. Les deux dimensions doivent être strictement positives : **0 < x < 20**.

L'aire, en mètres carrés, est A(x) = x(40 − 2x) = 40x − $2x^2$. Sa dérivée est **A′(x) = 40 − 4x**.

A′(x) est positive pour x < 10, nulle en 10 et négative pour x > 10. Ainsi, A augmente sur]0 ; 10], puis diminue sur [10 ; 20[.

Le maximum est atteint pour **x = 10 m et L = 20 m**. L'aire maximale vaut **A(10) = 200 m^2**.

Vérification : 10 + 10 + 20 = 40 m de clôture. Le mur remplace bien le quatrième côté : écrire 2x + 2L = 40 aurait modélisé une autre situation.

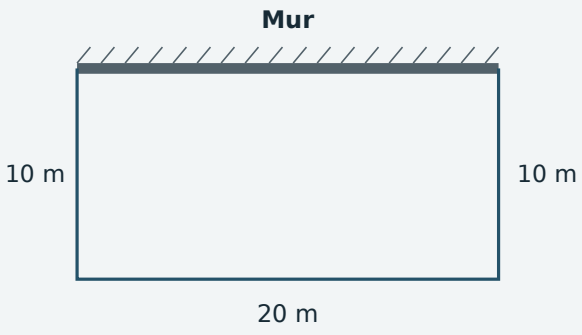
Exercice 9 - Utiliser une approximation affine

On écrit 4,04 = 4 + 0,04, donc **h = 0,04**. De plus, **f(4) = 2** et **f′(4) = 1 / 4**.

f(4 + 0,04) ≈ f(4) + 0,04f′(4) = 2 + 0,04 / 4. Ainsi, **√4,04 ≈ 2,01**.

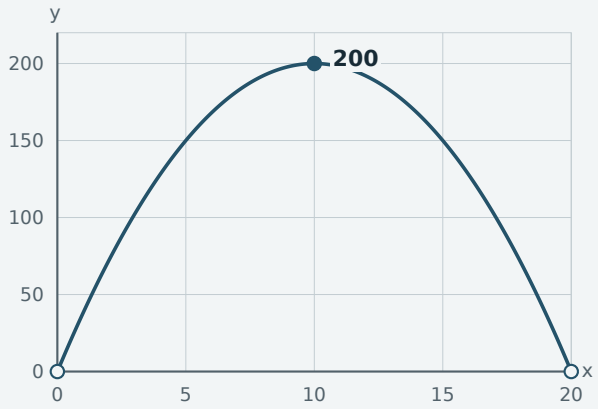
C'est une approximation : $2,01^2$ = 4,0401, ce qui permet de constater que 2,01 n'est pas la valeur exacte de √4,04.

Ex. 8 : les dimensions optimales



Aire maximale : 200 m².

A(x) = 40x − 2x²



Le modèle géométrique et le statut approché du résultat

Conserver tous les facteurs de la dérivée

EX. 10 : PREMIÈRE | EX. 11 : COMPLÉMENT DE TERMINALE

Exercice 10 - Produit avec une exponentielle

La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$. Le produit donne $f'(x) = e^{-x} - (x + 2)e^{-x}$, soit $\mathbf{f'(x) = -(x + 1)e^{-x}}$.

Sur [0 ; 4], $x + 1$ est positif et e^{-x} est strictement positif. Donc $f'(x) < 0$: **f est strictement décroissante sur [0 ; 4]**.

Son maximum vaut $\mathbf{f(0) = 2}$, atteint en 0. Son minimum vaut $\mathbf{f(4) = 6e^{-4}}$, atteint en 4.

Le facteur exponentiel ne s'annule jamais. Il reste nécessaire dans la formule de f', même si son signe est toujours positif.

Complément de terminale

Exercice 11 - Dériver des fonctions composées

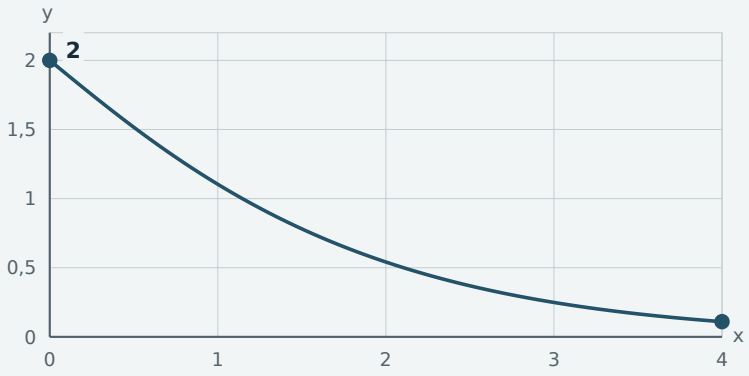
1. Sur $\mathbb{R}$, pose $u(x) = 3x^2 + 1$, donc $u'(x) = 6x$. Alors $f'(x) = 4 \times 6x \times (3x^2 + 1)^3 = \mathbf{24x(3x^2 + 1)^3}$.

2. Il faut $2x + 3 > 0$, donc $x > -3/2$. Sur $\mathbf{]-3/2 ; +\infty[}$, $g'(x) = \mathbf{2 / (2x + 3)}$.

3. Sur $\mathbb{R}$, la fonction intérieure $3x - 1$ a pour dérivée 3. Donc $\mathbf{p'(x) = 3\cos(3x - 1)}$.

Dans chaque réponse, vérifie la présence de la dérivée intérieure : 6x, 2 ou 3. Pour le logarithme, la condition porte sur l'argument entier $2x + 3$.

Ex. 10 : f est strictement décroissante sur [0 ; 4]



Maximum en 0 :
f(0) = 2

Minimum en 4 :
f(4) = 6e^{-4}

Du signe de la dérivée au maximum

EXERCICE 12 | Complément de terminale : ln(x) / x

Exercice 12 - Étudier ln(x) / x

La fonction est dérivable sur]0 ; +∞[. Avec u(x) = ln(x), u′(x) = 1/x, v(x) = x et v′(x) = 1 :

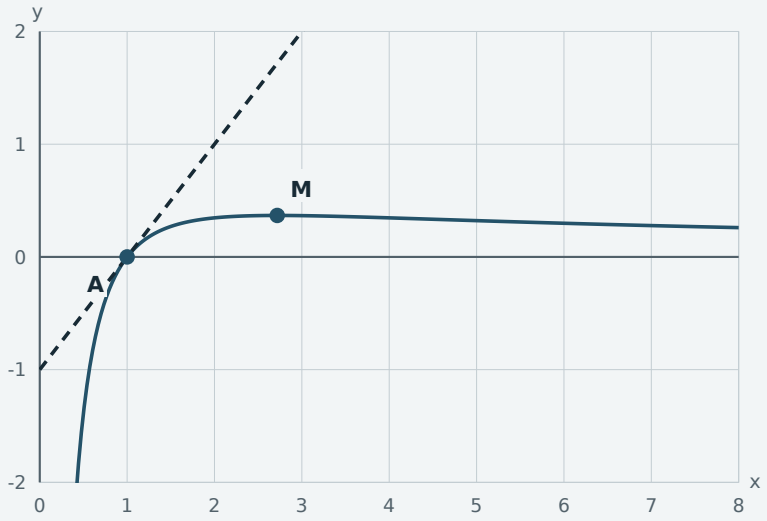
f′(x) = [(1/x) × x − ln(x)] / x^2 = **[1 − ln(x)] / x^2**.

Le dénominateur est strictement positif. Comme ln est strictement croissante, 1 − ln(x) est positif pour 0 < x < e, nul en e et négatif pour x > e.

Donc **f est strictement croissante sur]0 ; e]**, puis **strictement décroissante sur [e ; +∞[**. Elle atteint son **maximum global en x = e, égal à f(e) = 1/e**.

Enfin, f(1) = 0 et f′(1) = 1. La tangente en 1 est **y = x − 1**.

Ex. 12 : maximum global et tangente en 1



A(1 ; 0)

Tangente : y = x − 1

M(e ; 1/e)

Maximum : 1/e

Vue partielle de la courbe.
Domaine :]0 ; +∞[.

Trait plein : f(x) = ln(x) / x ; pointillés : tangente en 1.

Les conditions et les conclusions à conserver dans la rédaction